MỤC LỤC

[Danh mục các bảng iii](#_Toc358754382)

[Danh mục các hình iv](#_Toc358754383)

[Chương 1 MỞ ĐẦU 1](#_Toc358754384)

[1.1 Phạm vi và mục tiêu 1](#_Toc358754386)

[1.2 Những đóng góp chính của khóa luận 4](#_Toc358754387)

[1.3 Cấu trúc khóa luận 5](#_Toc358754388)

[1.4 Qui ước ký hiệu và viết tắt 5](#_Toc358754389)

[Chương 2 TỔNG QUAN VỀ GIẢI THUẬT VÀ ĐỘ PHỨC TẠP CỦA GIẢI THUẬT 6](#_Toc358754390)

[2.1 Giới thiệu 6](#_Toc358754396)

[2.2 Giải thuật và các tính chất của giải thuật 7](#_Toc358754397)

[2.3 Độ phức tạp của giải thuật 15](#_Toc358754401)

[2.4 Một số kỹ thuật cơ bản để thiết kế giải thuật 9](#_Toc358754398)

[2.5 Cơ sở toán học hỗ trợ tính độ phức tạp của giải thuật 18](#_Toc358754403)

[2.6 Kết luận 27](#_Toc358754404)

[Chương 3 28](#_Toc358754405)

[GIẢI THUẬT NGẪU NHIÊN 28](#_Toc358754406)

[3.1. Giới thiệu 28](#_Toc358754408)

[3.2. Định nghĩa và ví dụ giải thuật ngẫu nhiên 29](#_Toc358754409)

[3.3. Phân loại các giải thuật ngẫu nhiên 30](#_Toc358754410)

[3.4. Giải thuật Monte Carlo 31](#_Toc358754411)

[3.5. Giải thuật Las Vegas 31](#_Toc358754412)

[3.6. Các lĩnh vực áp dụng của giải thuật ngẫu nhiên ([5]) 32](#_Toc358754413)

[3.7. Kết luận 32](#_Toc358754414)

[Chương 4 33](#_Toc358754415)

[GIẢI THUẬT NGẪU NHIÊN CHO MỘT SỐ BÀI TOÁN 33](#_Toc358754416)

[4.1. Giới thiệu 33](#_Toc358754418)

[4.2. Bài toán sắp xếp 33](#_Toc358754419)

[4.3. Bài toán xác định số nguyên tố 33](#_Toc358754420)

[4.4. Bài toán tìm cặp điểm gần nhất 34](#_Toc358754421)

[4.5. Bài toán so trùng mẩu (có thể chọn bài khác) 34](#_Toc358754422)

[4.6. Bài toán tìm cây bao trùm nhỏ nhất của đồ thị 34](#_Toc358754423)

[4.7. Kết luận 45](#_Toc358754424)

[Chương 5 46](#_Toc358754425)

[HIỆN THỰC GIẢI THUẬT NGẪU NHIÊN CHO MỘT SỐ BÀI TOÁN 46](#_Toc358754426)

[5.1. Giới thiệu 46](#_Toc358754428)

[5.2. Bài toán sắp xếp 46](#_Toc358754429)

[5.3. Bài toán xác định số nguyên tố 46](#_Toc358754430)

[5.4. Bài toán tìm cặp điểm gần nhất 46](#_Toc358754431)

[5.5. Bài toán so trùng mẩu 46](#_Toc358754432)

[5.6. Giải thuật ngẫu nhiên tìm cây bao trùm nhỏ nhất của đồ thị 46](#_Toc358754433)

[5.7. Kết luận 62](#_Toc358754434)

[Chương 6 62](#_Toc358754435)

[TỔNG KẾT VÀ ĐỀ NGHỊ 62](#_Toc358754436)

[6.1. Tổng kết 62](#_Toc358754438)

[6.2. Đề nghị 62](#_Toc358754439)

[TÀI LIỆU THAM KHẢO 62](#_Toc358754440)

## Danh mục các bảng

## Danh mục các hình

# Chương 1

# MỞ ĐẦU

## Phạm vi và mục tiêu

Các nhà khoa học vào thế kỉ trước đã thấy rằng tính chất ngẫu nhiên là thành phần thiết yếu trong việc mô hình hóa và phân tích tự nhiên. Ngày nay, sự ngẫu nhiên đóng vai trò quan trọng trong hầu hết mọi lĩnh vực của khoa học từ di truyền học và tiến hóa trong sinh học đến mô hình biến động giá của nền kinh tế thị trường tự do. Khoa học máy tính cũng không ngoại lệ, phương pháp ngẫu nhiên và xác xuất đóng vai trò cốt lỗi trong khoa học máy tính hiện đại. Trong hai thập kỉ qua chúng ta đã chứng kiến sự phát triển to lớn của việc sử dụng lý thuyết xác xuất trong khoa học máy tính. Thêm vào đó nhiều kỹ thuật xác suất hiện đại và cải tiến tạo điều kiện cho việc phát triển các giải thuật ngẫu nhiên.

Khái niệm giải thuật ngẫu nhiên là một khái niệm tương đối mới. Trong mọi giải thuật được giới thiệu từ xưa đến nay, mỗi bước trong giải thuật đều được xác định. Với giải thuật ngẫu nhiên thì chúng ta không xác định được, trong quá trình thực hiện một giải thuật ngẫu nhiên nó sẽ đưa ra một chọn lựa tùy ý. Một số hành động được thực hiện một cách ngẫu nhiên. Ngoài đầu vào, giải thuật sữ dụng một nguồn các con số ngẫu nhiên. Trong quá trình tính toán, nó sử dụng những lựa chọn ngẫu nhiên phụ thuộc vào những số ngẫu nhiên. Output có thể khác nhau nếu giải thuật chạy nhiều lần trên cùng một input.

Hơn nữa, giải thuật ngẫu nhiên thường đơn giản và dễ thực hiện. Các giải thuật này chạy nhanh hơn giải thuật cổ điển giải cùng một bài toán. Yêu cầu về không gian của một giải thuật ngẫu nhiên có thể nhỏ hơn của giải thuật nhất định mà chúng ta biết để giải cùng một bài toán . Trong vài trường hợp, giải thuật ngẫu nhiên là cách duy nhất hoặc tốt nhất để giải quyết vấn đề.([3],[4],[5])

Giải thuật ngẫu nhiên và xác suất đóng vai trò quan trọng trong khoa học máy tính, với những ứng dụng từ tối ưu tổ hợp và máy tính học cách giao tiếp với mạng và giao thức bảo mật.

Hiện nay, các giải thuật được áp dụng trong lĩnh vực khoa học máy tính đã được tối ưu rất nhiều, các giải thuật này đã chạy rất nhanh. Tuy nhiên, thời gian rất quý giá, một giây cũng có thể thay đổi rất nhiều thứ. Với giải thuật ngẫu nhiên chúng ta sẽ tiết kiệm được rất nhiều thời gian so với giải thuật truyền thống cùng giải một bài toán. Thêm vào đó, giải thuật ngẫu nhiên có thể sử dụng ít tài nguyên hệ thống hơn. Với những ưu điểm mà giải thuật ngẫu nhiên mang lại, thì việc nghiên cứu các giải thuật ngẫu nhiên là hết sức có ý nghĩa. Vì vậy, chúng em đã chọn đề tài “*Nghiên cứu và ứng dụng các giải thuật ngẫu nhiên*” để làm khóa luận. Trong khóa luận này chúng em đã đầu tư nghiên cứu các giải thuật ngẫu nhiên, so sánh giải thuật ngẫu nhiên với các giải thuật cổ điển đã biết.

## Những đóng góp chính của khóa luận

Dưới đây là những đóng góp chính của khóa luận đối với lĩnh vực khoa học máy tính:

1. Trình bày khái niệm giải thuật và cách tính toán độ phực tạp của giải thuật
2. Trình bày khái niệm giải thuật ngẫu nhiên
3. Trình bày và áp dụng lý thuyết xác suất để tính toán độ phức tạp, cũng như khả năng cho ra kết quả đúng của giải thuật ngẫn nhiên.
4. Hiện thực một số giải thuật ngẫu nhiên cho các bài toán thuộc các lĩnh vực toán học, tìm kiếm, lý thuyết đồ thị.

## Cấu trúc khóa luận

Khóa luận bao gồm 6 chương. Chương 1 trình bày phạm vi, mục tiêu và ý nghĩa về lý thuyết cũng như ứng dụng của đề tài khóa luận, giới thiệu cấu trúc, các qui ước ký hiệu và viết tắt trong khóa luận. Mỗi chương tiếp theo, từ Chương 2 đến Chương 6 có một phần giới thiệu và một phần kết luận.

Chương 2 giới thiệu tổng quan về giải thuật và độ phức tạp của giải thuật. Đây là một số kiến thức cần thiết sữ dụng cho việc thiết kế giải thuật. Chương này còn giới thiệu các công cụ toán học hỗ trợ phân tích, đánh giá độ phức tạp của giải thuật

Chương 3 trình bày tổng quát về giải thuật ngẫu nhiên và phân loại giải thuật ngẫu nhiên.

Chương 4 trình bày một số giải thuật ngẫu nhiên cho các bày toán thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như: sắp xếp, tìm kiếm, toán học, lý thuyết đồ thị….

Chương 5 là phần hiện thực các giải thuật ngẫu nhiên được nêu ra ở chương 4.

Chương 6 là phần tổng kết và đề nghị các hướng nghiên cứu trong tương lai liên quan đến giải thuật ngẫu nhiên.

## Qui ước ký hiệu và viết tắt

Trong sách này có một số qui ước và kí hiệu viết tắt như sau:

: Với mọi

: Thuộc

: Tồn tại

: -lớn

: Omega

: Theta

: Phép toán giao tập hợp

: Phép toán hợp tập hợp

BT: Bài toán.

# Chương 2

# 

# TỔNG QUAN VỀ GIẢI THUẬT

# VÀ ĐỘ PHỨC TẠP CỦA GIẢI THUẬT



## Giới thiệu

Chương này giới thiệu một cách khái quát về giải thuật, độ phức tạp thời gian của giải thuật và trình bày một số công cụ toán học hỗ trợ việc phân tích và thiết kế giải thuật.

Đầu tiên Phần 2.2 trình bày khái niệm giải thuật, tính chất và ngôn ngữ biểu diễn giải thuật. Kế đến Phần 2.3 nêu khái niệm độ phức tạp của giải thuật, cách biểu diễn độ phức tạp thời gian của giải thuật và một số ví dụ minh họa. Tiếp theo, Phần 2.4 là trình bày một số chiến lược thiết kế cơ bản của giải thuật là cơ sở cho việc phát triển các giải thuật truyền thống cũng như giải thuật ngẩu nhiên. Phần 2.5 trình bày một số công cụ toán học làm cơ sở cho việc tính toán độ phức tạp của giải thuật. Cuối cùng, Phần 2.6, là các kết luận đáng lưu ý của Chương này.

## 2.2 Giải thuật và các tính chất của giải thuật

Một cách không hình thức, giải thuật là cách thức để đạt được lời giải của bài toán dựa trên một số hữu hạn các bước cần phải thao tác, tính toán. Giải thuật được định nghĩa một cách hình thức ([], []) như sau:

**Định nghĩa 2.2.1** *Giải thuật* là một thủ tục xác định bao gồm một dãy hữu hạn các bước cần thực hiện để thu được lời giải bài toán.

Xét về bản chất toán học, mỗi giải thuật tương ứng với một *ánh xạ* (mapping). Nghĩa là, ánh xạ là mô hình toán học của giải thuật. Mỗi giải thuật có một tên, một tập dữ liệu *đầu vào* (input) và một tập dữ liệu *đầu ra* (output) tương ứng với yêu cầu và lời giải bài toán. Một giải thuật có một số đặc tính cơ bản sau.

1. Tính *chính xác* (precision), đảm bảo kết quả tính toán hay các thao tác giải thuật được thực hiện là chính xác.
2. Tính *hữu hạn* (finiteness), nghĩa là thuật giải phải dừng sau một số hữu hạn bước thực hiện.
3. Tính *phổ dụng* (generality), nghĩa là giải thuật có thể áp dụng cho một lớp các bài toán có cùng kiểu dữ liệu đầu vào với kích thước khác nhau.

Để có thể mô tả và biểu diễn giải thuật và từ đó có thể viết thành các chương trình máy tính, chúng ta có thể dùng *ngôn ngữ tự nhiên* (natural language), *mã giả* (pseudocode) hay *ngôn ngữ lập trình cấp cao* (high programming language) như Pascal, C/C++, v.v. Trong phạm vi khóa luận này, các giải thuật sẽ được trình bày bằng mã giả.

Ví dụ 2.2.1 Giải thuật tìm số *k* trong dãy số *a*1, *a*2, ...., *an*, trong đó n là một số tự nhiên, có thể được viết như sau.

SequentialSearch(*a*[1..*n*], *k*)

1 **for** *i* ← 1 **to** *n*

2 **do if** *a*[*i*] =*k*

3 **then** **return** true

4 **return** false

Ở đây, đầu vào là một số *k* và một dãy *n* số *a*[1], *a*[2],…, *a*[*n*], đầu ra là một giá trị logic biểu diễn có hay không số *k* trong dãy đã cho. Đây cũng là một giải thuật có mặt hầu như trong bất kỳ hệ thống thông tin nào. Chẳng hạn, trong CSDL bài toán tìm kiếm một đối tượng theo một khóa dựa trên thuật giải này.

Trong lý thuyết độ phức tạp tính toán, giải thuật được chia làm hai loại. Giải thuật *đơn định* (deterministic)và *không* *đơn định* (nondeterministic) như các định nghĩa sau.

**Định nghĩa 2.2.2** Một giải thuật được gọi là *đơn định* nếu kết quả của mỗi thao tác, tính toán luôn luôn được xác định một cách duy nhất.

Giải thuật đã nêu trong Ví dụ 2.2.1 là một giải thuật đơn định. Vì rõ ràng kết quả của mỗi tính toán trong giải thuật này là duy nhất.

**Định nghĩa 2.2.3** Một giải thuật được gọi là *không đơn định* nếu tồn tại các thao tác, tính toán mà kết quả thuộc về một tập nhưng không biết chính xác kết quả nào trong tập đó.

Ví dụ 2.2.2 Giải thuật sắp xếp sau đây là một giải thuật không đơn định (có độ phức tạp O(n))

NSort(*A*[1..*n*]) // sắp xếp *n* số nguyên dương

1 **for** *i* ← 1 **to** *n* **do** *B*[*i*] ← 0

2 **for** *i* ← 1 **to** *n*

3 **do**  *j* := **choice**(1:*n*) //thực hiện đồng thời nhiều bản sao (không đơn định)

4 **if** *B*[*j*] <> 0 **then failure**

5 **else** *B*[*j*] ← *A*[*i*]

6 **for** *i* ← 1 **to** *n*-1

7 **do if** *B*[*i*] > *B*[*i*+1] **then failure**

8 **return** *B* //*B*[1..*n*] là mảng được sắp các số trong *A*[1..*n*]

Lớp các giải thuật ngẫu nhiên được trình bày trong các chương sau là các giải thuật không đơn định.

## 2.3 Độ phức tạp của giải thuật

Độ phức tạp của giải thuật (complexity of algorithm) là đọ do về tính hiệu quả của giải thuật. Độ phức tạp là phương tiện, công cụ để đánh giá giải thuật tốt hay xấu, giải thuật dễ hay khó. Độ phức tạp giải thuật là một khái niệm cơ bản, trung tâm của lý thuyết phân tích và thiết kế giải thuật.

**Định nghĩa 2.3.1** *Độ phức tạp của giải thuật* là chi phí về tài nguyên của hệ thống (chủ yếu là thời gian, bộ nhớ, bộ xử lí và đường truyền) cần thiết để thực hiện giải thuật ([1] [18]).

Để tính toán độ phức tạp của giải thuật, cần thiết phải phân tích giải thuật. Đó là kỹ thuật đánh giá tài nguyên chi phí cho giải thực hiện như định nghĩa sau.

**Định nghĩa 2.3.2** Phân tích giải thuật (analyzing of algorithm) là quá trình tìm ra những đánh giá về tài nguyên cần thiết để thực hiện giải thuật.

Trong khóa luận này, chỉ độ phức về thời gian của giải thuật được quan tâm, vì độ phức tạp thời gian của giải thuật phụ thuộc chủ yếu vào kỹ thuật thiết kế và độc lập với phần cứng của hệ thống máy tính.

Một cách cụ thể hơn, thời gian chi phí cho một giải thuật phụ thuộc vào số thao tác (lệnh) mà giải thuật thực hiện, nghĩa là phụ thuộc vào kích thước đầu vào của giải thuật. Nói các khác thời gian thực hiện của một giải thuật là một hàm *T*(*n*) của đối số n nguyên dương biểu diễn kích thức của dữ liệu bài toán mà giải thuật được thiết kế để giải nó. Trong quá trình phân tích giải thuật, thời gian được tính toán có thể được chia thành ba trường hợp như định nghĩa sau.

**Định nghĩa 2.3.3** Thời gian tối thiểu, nhiều nhất, trung bình để thực hiện giải thuật với kích thước đầu vào n gọi là thời gian chạy *tốt nhất* (best-case), *xấu nhất* (worst-case), *trung bình* (average-case) của giải thuật.

Ví dụ 2.3.1 Xét giải thuật trong Ví dụ 2.2.1, gọi α, β và γ là thời gian thực hiện của phép gán, phép so sánh và trả về của giải thuật, thì

1. Trường hợp tốt nhất xẩy ra nếu *a*[1] = *k*, khi đó *T*(*n*) = α+β + γ.
2. Trường hợp xấu nhất xẩy ra nếu *k* ∉ {*a*[1], *a*[2], ...., *a*[*n*]} khi đó *T*(*n*) = (*n*+1)α + *n*β + γ.
3. Trường hợp trung bình được tính toán dựa trên kỳ vọng xác suất. Gọi xác suất tìm kiếm thành công là *p* (xác không tìm thấy là 1-*p*) khi đó

*T*(*n*) = Σ*i*=1,..*n*(*i*α + *i*β + γ)*p*/*n* + ((*n*+1)α + *n*β + γ))(1-*p*)

= (α + β)(*n*+1)*p*/2 +γ*p* + ((*n*+1)α + *n*β + γ))(1-p)

Lưu ý rằng khi *p*=1 (luân luôn tìm thấy), thì *T*(*n*)= (α + β)(*n*+1)/2 +γ.

Để biểu diễn độ phức tạp giải thuật một cách đơn giản, gần đúng, chúng ta dùng khái niệm tốc độ tăng của hàm như định nghĩa sau ([]).

**Định nghĩa 2.3.3** Giả sử là hàm không âm đối số nguyên dương *n*, khi đó

1. có tốc độ tăng (bậc) không quá và viết nếu có hằng số và số nguyên dương N sao cho ,
2. có tốc độ tăng ít nhất là và viết nếu có hằng số và số nguyên dương N sao cho ,
3. có tốc độ tăng là và viết nếu và

Các ký hiệu O, và giọi là ký hiệu tiệm cận (asymptotic notation). Chúng ta dễ dàng chứng minh được định lý sau.

**Định lý 2.3.1** Giả sử và *c* là một hằng số thì

Định lý có thể được phát biểu tương tự cho các ký hiệu và Bây giờ thời gian chạy của một giải thuật có thể được định nghĩa theo các ký hiệu tiệm cận như sau.

**Định nghĩa 2.3.4** Nếu giải thuật có thời gian chạy tốt nhất (trung bình, xấu nhất) là và thì ta nói thời gian chạy tốt nhất (trung bình, xấu nhất) của giải thuật có bậc (tốc độ tăng) không quá hay thời gian chạy tốt nhất (trung bình, xấu nhất) của giải thuật là .

Chúng tôi lưu ý rằng, Định nghĩa 3.2.4 có thể được phát biểu cho các ký hiệu tiệm cận. Tốc độ tăng của thời gian chạy càng lớn thì giải thuật càng chậm (chẳng hạn, giải thuật có thời gian chạy hiệu quả hơn giải thuật có thời gian chạy

**Ví dụ 2.3.2** Phân tích giải thuật tính gần đúng

Exp(x, n)

1 s ←1

2 **for** i ←1 to n

3 **do** p ←1

4 **for** j ←1 to i

5 **do** p ←p\*x/j

6 s ←s + p

7 **return** s

Gọi lần lượt là thời gian thực hiện lệnh gán, trả về, thì

Tốc độ tăng của độ phức tạp giải thuật biểu diễn theo O, , phụ thuộc vào số lần thực hiện của thao tác (lệnh) được thực thi nhiều lần nhất và có có chi phí lớn nhất trong giải thuật. Các thao tác được thực thi nhiều lần nhất và có có chi phí lớn nhất trong giải thuật gọi là *thao tác cơ bản* (basic operation). Vì vậy, có thể tính độ phức tạp đơn giản bằng cách chỉ xác định và đếm số thao tác cơ bản trong giải thuật ([1],[17]).

**Ví dụ 2.3.3** Phân tích độ phức tạp của giải thuật sau (một cải tiến của giải thuật trong Ví dụ 2.3.2)

Exp(, n)

1 s ←1

2 p ←1

3 **for** i 🡨1 to *n*

4 **do** p ← // phép toán cơ bản là phép chia

5 s ←s + p

6 **return** s

Rõ ràng lệnh cơ bản là *x*/*i*, nên , trong đó là thời gian thực hiện của thao tác *x*.

## 2.4 Một số kỹ thuật cơ bản để thiết kế giải thuật



Để có thể phát triển các giải thuật hiệu quả cho các bài toán ứng dụng thực tế, cần có các phương pháp, cách thức và *chiến lược thiết kế* (design strategy) một cách khoa học. Dưới đây là một số chiến lược thiết kế cơ bản nhất, thường được ứng dụng nhiều nhất trong quá xây dựng các giải thuật.

**Chiến lược trực tiếp**



Chiến lược *trực tiếp* (brute force) áp dụng để thiết kế giải thuật cho một bài toán dựa trên định nghĩa và các khái niệm liên quan trực tiếp đến bài toán đó ([]). Đây là chiến lược dễ dàng áp dụng và được lựa chọn đầu tiên trong quá trình phân tích thiêt kế giải thuật cho bài toán . Chiến lược trực tiếp được áp dụng cho một lớp rất rộng các bài toán. Chi phí thiết kế rẻ, nên chiến lược trực tiếp thích hợp cho các bài toán kích thước nhỏ. Tuy nhiên, chiến lược trực tiếp có thể sinh ra một số giải thuật có độ phức tạp khá lớn hoặc rất lớn). Mặc dù vậy, chiến lược trực tiếp là cơ sở để đề xuất các giải thuật mới.

**Ví dụ 2.4.1** Xét bài toán tính tổng *S*=1+2+…+ *n*, với *n* là một số nguyên dương. Giải thuật dựa trên chiến lược trực tiếp để tính tổng này như sau.

Sum(*n*)

1 *S* ←0

2 **for** *i* ←1 to *n*

3 **do** *S* ←*S*+*i*

4 **return** *S*

Rõ ràng đây là một giải thuật được thiết kế trực tiếp và tự nhiên nhất dựa trên biểu diễn trực tiếp của tổng *S*. Kỹ thuật đơn giản là cộng dồn (như trong giải thuật), hoặc đệ qui đều có thể tính *S* một cách trực tiếp. Dễ thấy độ phức tạp của giải thuật là O(*n*). Tuy nhiên nếu dùng phép biến đổi *S*=*n*(*n*+1)/2 thì sẽ có giải thuật O(1), hiệu quả hơn rất nhiều.

**Chiến lược chia để trị**

Chiến lược chia để trị (Divide-and-Conquer) là chiến lược thiết kế được áp dụng rất rộng rãi trong giải toán nói chung và thiết kế giải thuật nói riêng ([1]). Giải thuật giải một bài toán dựa trên chiến lược chia để trị được phát triển theo ba bước:

1. Chia bài toán thành các bài toán con, thường là cùng kiểu.
2. Giải các bài toán con (thường dùng kỹ thuật đệ qui).
3. Kết hợp lời giải các bài toán con để có lời giải bài toán ban đầu .

**Ví dụ 2.4.2** Cho một mảng các số được sắp theo thứ tự tăng và một số , tìm trong mảng số có giá trị bằng

BinarySearch(*A*[*p*..*r*], *K*)

1. **if** *p*≤*r*
2. **then** *m* ← ⎣(*p*+*r*)/2⎦
3. **if** *A[m]=K*
4. **then return** true
5. **else if** *A*[*m*]>*K*
6. **then return** BinarySearch(*A*[*p*..*m*-1], *K*)

7 **else return** BinarySearch(*A*[*m+1*..*r*], *K*)

1. **else return** false

Để tính độ phức tạp của giải thuật này, đặt *n*=*r*+*p*-1 (số phần phần tử của mảng). Khi đó *T*(*n*)= O(1), nếu *p*>*r* và *T*(*n*)=*T*(⎣*n*/2⎦)+O(1), nếu *p*≤*r*. Không mất tính tổng quát giả sử *m* là số nguyên sao cho *n*=2*m*. Khi đó *T*(*n*)≤*T*(*n*/2)+1=*T*(*n*/22)+2=…= *T*(*n*/2*m*)+*m*. Vậy *T*(*n*) ≤T(1)+*m*= O(1)+log2*n*=O(log2*n*).

**Chiến lược quy hoạch động**



Chiến lược qui hoạch động (dymamic programming) giải một bài toán bằng cách giải các bài toán con kích thước nhỏ hơn. Nghiệm của bài toán có được bằng cách kết hợp nghiệm của các bài toán con. Nghiệm (lời giải) bài toán ban đầu và các bài toán con được biểu diễn bởi một hệ thức truy hồi. Sử dụng chiến lược qui hoạch động để giải một bài toán được chia làm hai bước:

1. Mô hình hóa lời giải bài toán bằng một hệ thức truy hồi
2. Giải hệ thức truy hồi bằng một giải thuật hiệu quả (từ dưới lên)

Chiến lược qui hoạch động phát triển giải thuật giải bài toán bằng cách giải các bài toán con từ *dưới lên* (bottom up). Kết quả các bài toán con được lưu trữ trong một bảng và được sử dụng để giải bài toán đã cho. Vì kết quả các bài toán con được lưu trữ trong một bảng và được sử dụng để giải bài toán ban đầu nên chiến lược qui hoạch động rất hiệu quả. Qui hoạch động thường được ứng dụng để giải các bài toán tối ưu.

**Ví dụ 2.4.3** Cho một dãy *n* đồng xu có giá trị tương ứng là *c*1, *c*2, . . . , *cn*, hãy nhặt một số các đồng xu sao cho tổng giá trị lớn nhất và không có 2 đồng xu nào kề nhau.

Trước hết cần xây dựng hệ thức truy hồi biểu diễn tổng giá trị lớn nhất các đồng xu nhặt được F(*n*) xét hai trường hợp. Nếu đồng xu cuối cùng được chọn thì giá trị lớn nhất là *cn*+F(*n*-2). Nếu đồng xu cuối cùng không được chọn thì giá trị lớn nhất là F(*n-*1). Suy ra hệ thức truy hồi là

F(*n*)=*max*{*cn*+ F(*n* − 2), F(*n* − 1)} với *n* > 1,

F(0)=0, F(1)=*c*1

Giải thuật qui hoạch động được thiết kế như sau.

CoinRow(C[1..n])

1 F[0]←0; F[1]←C[1]

2 **for** *i* ←2 **to** *n*

3 **do**  F[*i*]←*max*(C[*i*]+ F[*i* − 2], F[*i* − 1])

4 **return** F[*n*]

Dễ thấy độ phức tạp của giải thuật là O(*n*). Chúng tôi lưu ý rằng, nếu dùng chiến lược trực tiếp để giải bài toán này sẽ dẫn đến giải thuật có độ phức tạp lũy thừa (rất lớn).

**Chiến lược tham ăn**



Giải thuật được thiết kế bằng chiến lược *tham ăn* (greedy) giải các bài toán con trước khi giải bài toán gốc. Quá trình tìm lời giải được thực hiện thông qua một dãy các bước để tìm lời giải (nghiệm) tối ưu cục bộ (lời giải các bài toán con) cho đến khi tìm thấy lời giải bài toán gốc. Mỗi bước tìm nghiệm cục bộ thỏa mãn ba tính chất sau.

1. Phải thỏa mãn ràng buộc bài toán.
2. *Tối ưu cục bộ* (locally optimal)
3. Không thay đổi nghiệm cục bộ trong các bước kế tiếp.

Chiến lược greedy luôn thực hiện một “lựa chọn” tốt nhất hiện tại khi tìm kiếm lời giải bài toán con mà không quan tâm đến bước tiếp theo. Chiến lược gready không giải tất cả các bài toán con (tối ưu) như qui hoạch động mà mỗi bước chỉ tìm lời giải tối ưu trong một tập các bài toán con ([1])

**Ví dụ 2.4.4** Tìm cây bao trùm nhỏ nhất của đồ thị liên thông vô hướng có trọng số.

Bài toán này được giải bằng chiến lược tham lam theo Kruskal như sau.

Kruskal(*G*, *w*) // Đồ thị *G* = (*V*, *E*) có trọng số mỗi cạnh *e* là *w*(*e*)

1 *F* ← ∅; *Q* ←*E*[*G*]; *N* ← *V*[*G*]

3 **while** **⏐***F***⏐**<**⏐***N***⏐**-1 and *Q*≠ ∅

4 **do** *e* ← ExtractMin(*Q*) // e có trọng số bé nhất

5 **if** *F*∪{*e*} not contain cycle **then** *F* ← *F*∪{*e*}

6 **if** ⏐*F*⏐<**⏐***N***⏐**-1

7 **then** *G* is not connected

8 **else** **return** *T* // T= (V, F)

Dòng 4 chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất bằng thủ tục ExtractMin(*Q*) tại một lần lặp thể hiện chiến lượng tham lam trong giải thuật. Thời gian chạy của ExtractMin(*Q*) là O(log2 *E*). từ đó thời gian chạy của giải thuật này được xác định là O(*V* log2 *E*).

**Chiến lược biến đổi để trị**



Chiến lược biến đổi để trị (transform-and-conquer) gồm hai tầng (giai đoạn):

1. Biến đổi thể hiện (instance-input) của bài toán để có thể dễ giải (hoặc giải hiệu quả) hơn.
2. Giải bài toán trên thể hiện (input) đã được biến đổi.

**Ví dụ 2.4.5** Xét bài toán tính tổng *S*=1+2+…+ *n*, với *n* là một số nguyên dương (trong Ví dụ 2.4.1). Áp dụng chiến lược biến đổi để trị biến đổi tổng *S*=1+2+…+ *n=n*(*n+*1)/2, ta có giải thuật.

Sum(*n*)

1 **return** *n*\*(*n*+1)/2

Rõ ràng độ phức tạp giải thuật là O(1), tốt hơn rất nhiều độ phức tạp O(n) của giải thuật trực tiếp trong Ví dụ 2.4.1).

**Chiến lược quay lui**



Giải thuật được thiết kế bằng chiến lược quay lui (backtraking) biểu diễn nghiệm bài toán như một vector với được chọn trong tập nào đó. Quá trình tìm được thực hiện bằng cách tính toán mỗi thành phần. tại một thời điểm. Tại bước thứ *i*, vector con tìm được gọi là một nghiệm bộ phận của bài toán. Để tìm thành phần thứ *k* của nghiệm (thỏa một số ràng buộcnào đó), khi đã chọn được thành phần của , giải thuật chọn (tính) trong số các khả năng có thể có của nó trong . Với mỗi khả năng j, giải thuật kiểm tra xem có chấp nhận đươc không. Nếu chấp nhận thì xác định theo j, khi thì có một lời giải, ngược thì tiếp tục xác định (thường bằng đệ qui). Nếu thử tất cả các khả năng mà không có khả năng nào được chấp nhận thì quay lui lại bước trước để xác định lại ([1]). Lược đồ tổng quát cho giải thuật được thiết kế theo chiến lược quay lui.

BackTracking(*x*[1..*k*], *n*) // xác định *x*[*k*], *k* nguyên

1 **for** *j* ←1 **to** *nk* // xét khả năng *j* trong *nk* khả năng

2 **do** **if** accepting *j*

3 **then** <computing *x*[*k*] in *Ak* that subjects to *j*>

4 **if** *k*=*n*

5 **then** < recording 1 solution >

6 **else** BackTracking(*x*[1..*k*+1], *n*)

**Chiến lược nhánh cận**



Chiến lược quay lui cho phép tìm được nghiệm đúng của bài toán, nhưng do phải thử mọi khả năng nên khi kích thước bài toán lớn sẽ rất kém hiệu quả. Chiến lược nhánh cận (Branch-and-Bound) khắc phục được hạn chế này bằng cách xác định nhánh cận với mục tiêu tại mỗi bước tìm kiếm, vì vậy loại bỏ được hầu hết các hướng tìm kiếm không cần thiết (trong cây không gian tìm kiếm). Chiến lược nhánh cận thường được áp dụng để giải các bài toán tối ưu. Chiến lược nhánh cận dựa trên chiến lược quay lui và một *hàm lượng giá* (estimate function) mục tiêu hướng đến các nhánh cận mục tiêu để tìm lời giải nhanh nhất có thể ([1]). Lược đồ tổng quát cho giải thuật được thiết kế theo chiến lược nhánh cận.

BranchBound(*x*[1..*k*], *n*) // developing local solution (*a*1, *a*2, …., *ak*-1)

1 **for** *ak* ∈ *Ak*

2 **do** **if** accepting *ak*

3 **then** *xk* ← *ak*

4 **if** *k* = *n*

5 **then** < update record>

6 **else if** *g*(*a*1, *a*2, …., *ak*) ≤ *f*\*

7 **then** BranchBound(*x*[1..*k*+1], *n*)

## Trong lược đồ này *g*(*x*) là cận dưới (lượng giá) của hàm mục tiêu *f*(*x*) và *f*\* là giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu hiện tại (gọi là một kỷ lục).

## 2.5 Cơ sở toán học hỗ trợ tính độ phức tạp của giải thuật

Để tính toán độ phức tạp của giải thuật, cần có một số công cụ toán cần thiết được giới thiệu sau đây.

**Phân nguyên và một số hệ thức cơ bản**

Khái niệm phần nguyên của một số thực được định nghĩa sau đây, thường được áp dụng trong thiết kế và phân tích giải thuật.

**Định nghĩa 2.5.1** Phần nguyên *sàn* (floor) của một số thực x, ký hiệu , là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn *x*. Phần nguyên trần (ceiling) của số thực , ký hiệu , là các số nguyên nhỏ nhất lớn hơn *x*.

Một số hệ thức toán học cơ bản được ứng dụng để tính toán độ phức tạp của giải thuật:

1. Giả sử *x* là một số thực, thì
2. Nếu n là số tự nhiên và a, b, c là các số thực dương thì
3. Với mọi thì

( gọi là số điều hòa thứ n - Harmonic Number)

**Hệ thức truy hồi**

Hệ thức truy hồi **(**recurrence Relation) là cơ sở toán học để tính toán độ phức tạp của giải thuật đệ qui. Phần này giới thiệu khái niệm và một định lý cơ bản về hệ thức truy hồi.

**Định nghĩa 2.5.2** Hệ thức truy hồi đối với dãy là một phương trình có dạng

Ví dụ 2.5.1 Hệ thức truy hồi

Dãy được gọi là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này. Ví dụ dãy {a*n*} với a*n* =3*n* là nghiệm của hệ thức trong Ví dụ 2.5.1.

**Định nghĩa 2.5.3** Một *hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất* (linear homogeneous recurrence relation) bậc *k*>0 là một hệ thức truy hồi ([]) có dạng

Với là các hằng số thực,

Định lý 2.5.1 Giả sử là các hằng số, phương trình có k nghiệm phân biệt. Khi đó dãy {} là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu và chỉ nếu với *n* =0,1,2,… Trong đó là các hằng số.

**Định lý 2.5.2** Giả sử *c*1, *c*2, ..., *ck* là các hằng số, phương trình *rk* - *c*1*rk*-1 - ... -*ck* = 0 có *t* nghiệm *r*1, *r*2, …, *rt* bội tương ứng *m*1, *m*2,,..., *m*t. Khi đó dãy {an} là nghiệm của hệ thức truy hồi *an*= *c*1*an*-1 + *c*2*an*-2 + ... + *ckan*-*k* nếu và chỉ nếu *an*= (α1, 0+ *α*1, 1*n*+…+ *α*1, *m*1-1*nm*1-1)*r*1*n* + (*α*2, 0+ *α*2,1*n* +…+ *α*2, *m*2-1n*m*2-1)*r*2*n* +...+ (*αt*, 0+ *αt*, 1*n*+…+ *αt*, *mt*-1n*mt*-1)*rtn* với *n*= 0, 1, 2, ... Trong đó *αi*, *j*, *i*=0,..*t*, *j*=0…, *mt* -1 là các hằng số.

**Định nghĩa 2.5.4** Một *hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất* (linear nonhomogeneous recurrence relation) bậc *k*>0 là một hệ thức truy hồi ([]) có dạng

với là các hằng số thực, , là một hàm chỉ phụ thuộc vào *n*

Ví dụ 2.5.2 Hệ thức là một hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất bậc 1.

Định lý 2.5.4 Nếu là một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất , thì mọi nghiệm của nó có dạng , trong đó là nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính .

Định lý 2.5.5 Giả sử thỏa mãn hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất , với , *t* là một số nguyên không âm. Khi đó

1. Nếu *s* không phải là nghiệm của phương trình thì (1) có một nghiệm dạng
2. Nếu *s* là một nghiệm bội *m* của phương trình thì (1) có một nghiệm dạng

**Định nghĩa 2.5.5** Hệ thức truy hồi dạng , trong đó a, b là các nguyên dương, được gọi là hệ thức truy hồi chia để trị (divide-and-conquer recurrence relation).

Ví dụ 2.5.3 là một hệ thức truy hồi chia để trị.

Định lý 2.5.6 Giả sử là một hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi khi n là số nguyên lớn hơn 1, c là một số thực dương , thì

Định lý 2.5.7 Giả sử là một hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi . khi n= là số nguyên lớn hơn 1, c và d là một số thực dương, thì

Các Định lý 2.5.6 và 2.5.7 được áp dụng để tính độ phức tạp của các giải thuật chia để trị.



**Lý thuyết xác suất**

Phần này giới thiệu một số khái niệm và hệ thức cơ bản nhất về xác suất được ứng dụng để thiết kế và phân tích giải thuật ngẩu nhiên trong các chương sau.



**Định nghĩa 2.5.6** Nếu *S* là một tập khác rỗng (gọi là không gian mẩu) của các *kết cục đồng khả năng* (equally likely outcome) và *E* là một sự kiện (một tập con của *S*), thì xác suất của *E* là *P*(*E*)*=* .

Chúng tôi lưu ý rằng một tập con *E* của *S* gọi là một sự kiện, một phần tử *s*∈*S*, gọi là một sự kiện cơ bản.

**Định nghĩa 2.5.3** Một phân bố xác suất (probability distribution) là một ánh xạ từ không gian mẩu đến tập các số thực *R*, Pr: *S*→ *R*, thỏa các tiên đề sau:

1. Pr(*A*)≥0, ∀*A*⊂*S*.
2. Pr(*S*)=1.
3. Pr(*A*∪*B*)=Pr(*A*)+Pr(*B*) với hai sự kiện bất kỳ *A*, *B* xung khắc, loại trừ lẫn nhau (mutually exclusive).

Từ các tiên đề ta suy ra:

1. Pr(∅)=0
2. Pr

**Định nghĩa 2.5.4** Một phân bố xác suất được gọi là *phân bố rời rạc* (discrete distribution) nếu nó được định nghĩa trên không gian mẩu rời rạc. Nếu *S* là không gian mẩu, thì Pr(*A*)=Σ*s*∈*A* Pr({*s*}), ∀*A*⊂*S*. Nếu Pr({*s*})=1/|*S*| thì ta có *phân bố đều* (uniform probability distribution) trên *S*

Để đơn giản khi sử dụng ký hiệu Pr({*s*}) thường được viết Pr(*s*).

**Ví dụ 2.5.4** Tung một đồng xu như nhau *n* lần, xác suất để đồng xu sấp (S) hoặc ngữa (N) mỗi lần tung là ½. Khi đó chúng ta có một phân bố đều trên không gian *S*={S, N}*n* với 2*n* phần tử. Mỗi sự kiện xác suất là một xâu *n* ký hiệu trong {S, N}. Mỗi xâu xuất hiện với xác suất là 1/2*n*. Xem sự kiện *A* là biến có (xâu) có đúng *k* mặt sấp xuất hiện. Khi đó |*A*|=, nên Pr(*A*)= /|*S*|

**Định nghĩa 2.5.4** Xác suất có điều kiện của sự kiện A khi có sự kiện B được định nghĩa là

Từ định nghĩa trên ta có các hệ thức sau:

1. , nếu A và B độc lập

Một hệ các sự kiện được gọi là đầy đủ nếu chúng đôi một xung khắc và =S.

**Định lý 2.5.8** Nếu các biến cố là một hệ đầy đủ các biến cố. H là một biến cố trong không gian mẩu. Khi đó

Ta có:

**Định lý 2.5.8** (Định lý Bayes)Giả sử A và B là 2 sự kiện trong không gian mẩu, ta có

**Định nghĩa 2.5.5** Một *biến ngẩu nhiên* (random variable) là một hàm *X*: *S* → *R* từ không gian mẩu *S* đến tập các số thực *R*.

Với mỗi biến ngẩu nhiên *X* và số thực *x*, sự kiện *X*=*x* được định nghĩa là {*s*∈*S*: *X*(*s*)=*x*}. Khi đó Pr(*X*=*x*)=Σ*s*∈*S*: *X*(*s*)=*x* Pr(*s*).

**Ví dụ 2.5.5** Nếu ta tung 2 con xúc sắc 6 mặt thì không gian xác suất *S* gồm 36 sự kiện cơ bản. Giả sử phân bố xác suất trên *S* là đều, biến ngẩu nhiên *X* được định nghĩa là gía trị lớn nhất của số trên mặt của 2 con xúc sắc xuất hiện khi tung chúng. Từ định nghĩa ta có Pr(*X*=3) =5/36. Sự kiện *X*=3 tương ứng với {(1; 3), (2; 3), (3; 3), (3; 2), (3; 1)}.

**Định nghĩa 2.5.5** *Giá trị kỳ vọng* (expected value) của biến ngẩu nhiên X được định nghĩa là

*E*(*X*)=Σ*x*∈*R* *x*.Pr(*X*=*x*)

Từ định nghĩa chúng ta suy ra rằng *E*(*X*)=Σ*s*∈*S* Pr(*s*).*X*(*s*). Ngoài ra, chúng ta cũng nhận xét rằng giá trị kỳ vọng của biến *X* cũng là giá trị trung bình của nó. Vì vậy, kỳ vọng là công cụ toán học giúp tính toán độ phức tạp trung bình của giải thuật.

**Ví dụ 2.5.6** Giả sử *X* là biến ngẩu nhiên nhận giá trị là số trên mặt của con xúc sắc xuất hiện khi chúng ta tung nó. Tính kỳ vọng của *X*.

Có 6 khả năng xẩy ra, biến *X* nhận giá trị tương ứng là 1, 2,…, 6 với xác suất là 1/6 cho mỗi khả năng. Vì vậy *E*(*X*)=1/6(1+2+…+6)= 21/6 là số trung bình trên mặt con xúc sắc xuất hiện khi tung nó.

**2.6 Kết luận**

Trong chương 2 này, các khái niệm cơ bản nhất về giải thuật, độ phức tạp, cũng như các chiến lược thiết kế giải thuật thông dụng nhất đã được trình bày làm cơ sở để xây dựng và phát triển các giải thuật hiệu quả. Một số công cụ toán học như hệ thức truy hồi làm phương tiện để tính độ phức tạp các giải thuật đệ qui. Các công cụ về lý thuyết xác suất là cơ sở để xây dựng và phân tích các giải thuật ngẩu nhiên trong chương 3 tiếp theo.

# Chương 3

# GIẢI THUẬT NGẪU NHIÊN



## Giới thiệu

Chương này trình về giải thuật ngẫu nhiên, phân loại và các lĩnh vực áp dụng của giải thuật ngẫu nhiên.

Đầu tiên, Phần 3.2 trình bày định nghĩa của giải thuật ngẫu nhiên. Kế đến, Phần 3.3 trình bày về hai loại của giải thuật ngẫu nhiên đó là giải thuật Monte Carlo và giải thuật Las Vegas. Tiếp đó, Phần 3.4 trình bày các lĩnh vực áp dụng của giải thuật ngẫu nhiên như lý thuyết số, cấu trúc dữ liệu,…Cuối cùng, Phần 3.5 là kết luận của Chương này.

## Định nghĩa và ví dụ giải thuật ngẫu nhiên

Khái niệm các giải thuật ngẫu nhiên tương đối mới. Trong mọi giải thuật được giới thiệu từ xưa đến nay, mỗi bước trong giải thuật đều được xác định. Với giải thuật ngẫu nhiên thì chúng ta không xác định được, trong quá trình thực hiện một giải thuật ngẫu nhiên nó sẽ đưa ra một chọn lựa tùy ý. Một số hành động được thực hiện một cách ngẫu nhiên.

**Giải thuật xác định:**

**INPUT**

**ALGORITHM**

**OUTPUT**

Mục tiêu: chứng minh giải thuật luôn giải quyết vấn đề một cách chính xác và nhanh (thông thường, số lượng bước là đa thức dựa trên kích thước đầu vào).

**Giải thuật ngẫu nhiên:**

**INPUT**

**ALGORITHM**

**OUTPUT**

**RANDOM NUMBERS**

Ngoài đầu vào, giải thuật còn dùng một nguồn số ngẫu nhiên và thực hiện các chọn lựa ngẫu nhiên trong quá trình thực hiện. Kết quả có thể khác nhau ngay cả khi thực hiện trên một đầu vào nhất định.

Định nghĩa

Giải thuật ngẫu nhiên là một giải thuật mà nó không chỉ nhận dữ liệu đầu vào*input* mà còn một dãy *bit* được dùng nhằm mục đích đưa ra các chọn lựa ngẫu nhiên. Ngay cả đối với đầu vào là cố định, những lần chạy khác nhau của giải thuật ngẫu nhiên thì đưa ra các kết quả khác nhau; do đó một mô tả cho các thuộc tính của giải thuật ngẫu nhiên là sẽ liên quan đến các phát biểu về xác suất. Ví dụ, ngay khi đầu vào là cố định, thời gian thực hiện một giải thuật ngẫu nhiên là một giá trị ngẫu nhiên.([3])

Ví dụ

**Input:** Một dãy phần tử, trong đó một nửa là *a* và nửa còn lại là *b*.

**Ouput:** Tìm *a* trong mảng.

Có hai phiên bản của giải thuật ngẫu nhiên dùng để giải quyết bài toán này: một là giải thuật Las Vegas và một là giải thuật Monte Carlo.

**Giải thuật Las Vegas:**

|  |
| --- |
| FINDINGA\_LV(ARRAY A,N)  begin  repeat  Randomly select one element out of n elements.  until ‘a’ is found  end |

Giải thuật này thành công với xác suất là 1. Thời gian chạy là ngẫu nhiên (và lớn tùy ý) nhưng sự mong chờ của nó thì cận trên là . ([17])

**Giải thuật Monte Carlo:**

|  |
| --- |
| FINDINGA\_MC(ARRAY A, N, K)  begin  i=1  repeat  Randomly select one element out of n elements.  i=i+1  until i=k or ‘a’ is found  end |

Nếu *a* được tìm thấy, giải thuật thành công, không thì giải thuật thất bại. Sau khi lặp lại *k* lần, xác suất tìm thấy *a* là:

Giải thuật này không bảo đảm thành công nhưng thời gian chạy ổn định. Sự chọn lựa thì được thực hiện chính xác *k* lần, do dó thời gian chạy là . ([17])

## Phân loại các giải thuật ngẫu nhiên

Người ta phải phân biệt giữa các giải thuật mà chúng sử dụng đầu vào ngẫu nhiên để giảm thời gian chạy được mong đợi hoặc bộ nhớ sử dụng (thời gian hay giá thành), nhưng luôn chấm dứt với một kết quả đúng trong một giới hạn thời gian, và các giải thuật xác suất, mà phụ thuộc vào đầu vào ngẫu nhiên, có khả năng phát sinh ra kết quả sai *(giải thuật Monte Carlo)* hoặc thất bại trong việc tìm ra kết quả *(giải thuật Las Vegas)*hoặc bằng việc báo hiệu sự thất bại hoặc không thể chấm dứt.

## Giải thuật Monte Carlo

Giải thuật Monte Carlo là một giải thuật ngẫu nhiên luôn chấm dứt trong thời gian xác định bằng đa thức, nhưng có thể tạo ra kết quả sai.

*(Không được nhầm lẫn với phương pháp Monte Carlo)*

Trong lĩnh vực tính toán, một giải thuật Monte Carlo là một giải thuật ngẫu nhiên mà có số lần chạy xác định, nhưng đầu ra của nó có thể không chính xác với xác suất nhất định (thường là nhỏ).

Một lớp có liên quan của giải thuật Las Vegas cũng là ngẫu nhiên, nhưng bằng cách khác chúng có lượng thời gian ngẫu nhiên, nhưng đưa ra câu trả lời chính xác. Một giải thuật Monte Carlo có thể được chuyển thành giải thuật Las Vegas khi mà tồn tại một thủ tục để xác định output được sinh ra bởi giải thuật chắc chắn là chính xác.

## Giải thuật Las Vegas

Giải thuậy Las Vegas là giải thuật ngẫu nhiên luôn đưa ra kết quả đúng. Nhưng thời gian chạy ở mỗi lần thực hiện có thể khác nhau.

Trong lĩnh vực tính toán, một giải thuật Las Vegas là một giải thuật ngẫu nhiên, mà nó luôn đưa ra các kết quả chính xác; nghĩa là, luôn sinh ra kết quả chính xác hoặc nó thông báo cho biết thất bại. Nói cách khác giải thuật Las Vegas không đánh cược với tính chân thực của kết quả; nó đánh cược với các nguồn được dùng để tính toán. Một ví dụ đơn giản là giải thuật *randomized quicksort*, có chốt được chọn ngẫu nhiên, nhưng kết quả thì luôn là được sắp xếp. Định nghĩa thông thường của giải thuật Las Vegas gồm là sự hạn chế tức thời gian chạy dự kiến là hữu hạn, khi sự kì vọng được thực hiện trên không thông tin ngẫu nhiên, hoặc entrôpi, được dùng trong giải thuật.

Giải thuật Las Vegas được giới thiệu bởi Lászlo Babai năm 1979, trong phạm vi vấn đề đẳng cấu đồ thị, như một phiên bản vững chắc hơn giải thuật Monte Carlo. Giải thuật Las Vegas có thể được dùng trong các tình huống mà số lượng các giải pháp khả thi thì tương đối hạn chế, và xác định sự chính xác của các giải pháp đề cử thì tương đối dễ trong khi việc tính toán các giải pháp thì thực sự phức tạp

Tên của giải thuật dựa theo tên thành phố Las Vegas, Nevada – nơi đây được biết đến là một biểu tượng bài bạc của Mỹ.

## Các lĩnh vực áp dụng của giải thuật ngẫu nhiên

Giải thuật ngẫu nhiên và xác suất đóng vai trò quan trọng trong khoa học máy tính, với những ứng dụng từ tối ưu tổ hợp và máy tính học cách giao tiếp với mạng và giao thức bảo mật.

Ngày nay có thể nhật ra rằng, trong phạm vi ứng dụng rộng lớn, sự ngẫu nhiên hóa là một công cụ vô cùng quan trọng cho các giải thuật xây dựng. ([5])

* Lý thuyết số: kiểm tra số nguyên tố (Monte Carlo).
* Cấu trúc dữ liệu: sắp xếp, thống kê theo yêu cầu, tìm kiếm, tính toán trong hình học.
* Nhận dạng đại số: xác định tính đồng nhất của ma trận và đa thức, hệ thống chứng minh tương tác.
* Lập trình toán: các giải thuật nhanh hơn cho lập trình tuyến tính, làm tròn số.
* Các giải thuật đồ thị: các giải thuật tìm cây bao trùm nhỏ nhất, đường đi ngắn nhất, lát cắt nhỏ nhất.
* Đếm và bảng đếm: ma trận vĩnh cửu, giải tích tổ hợp.
* Tính toán song song và phân phối
* Chứng minh sự tồn tại có xác suất: đưa ra một tổ hợp đối tượng phát sinh với xác suất khác 0 giữa các đối tượng được vẽ ra từ một không gian xác suất phù hợp.
* Loại bỏ sự ngẫu nhiên: đầu tiên đưa ra một giải thuật ngẫu nhiên sau đó cho rằng nó có thể được loại bỏ sự ngẫu nhiên và tạo ra một giải thuật xác định.

## Kết luận

Qua phần giới thiệu về giải thuật ngẫu nhiên, chúng tôi xin nhấn mạnh rằng: đối với nhiều bài toán, giải thuật ngẫu nhiên là đơn giản nhất, hoặc nhanh nhất, hoặc vừa đơn giản nhất vừa nhanh nhất. Tuy nhiên, nó có thể là một nhiệm vụ phức tạp để chứng minh rằng giải thuật ngẫu nhiên xác định này có thuộc tính được mong muốn.

Ở chương kế tiếp, chúng tôi xin trình bày giải thuật ngẫu nhiên cho một số bài toán tiêu biểu.

# Chương 4

# GIẢI THUẬT NGẪU NHIÊN CHO MỘT SỐ BÀI TOÁN



## Giới thiệu

## Bài toán sắp xếp

## Bài toán xác định số nguyên tố

Bài toán này trình bày vấn đề xác định một số có phải là số nguyên tố hay không. Đây là một bài toán rất khó và mãi cho tới năm 2004 mới tìm được một giải thuật có thời gian chạy là đa thức.

Ở đây chúng tôi sẽ giới thiệu một giải thuật ngẫu nhiên giải quyết vấn đề này. Giải thuật này thực hiện

## Bài toán tìm cặp điểm gần nhất

## Bài toán so trùng mẩu (có thể chọn bài khác)

## Bài toán tìm cây bao trùm nhỏ nhất của đồ thị

Trong phần này, chúng tôi sẽ giới thiệu một giải thuật ngẫu nhiên tìm cây bao trùm nhỏ nhất với độ phức tạp là Giải thuật này tốt hơn rất nhiều so với các giải thuật truyền thống tìm cây bao trùm nhỏ nhất (giải thuật Kruskal, độ phức tạp hay giải thuật Prim, độ phức tạp ).

Giải thuật này dựa trên khái niệm Boruvka step, được đề xuất bởi Boruvka vào năm 1926. Bổ đề sau minh họa ý tưởng bên trong Boruvka step:

Bổ đề 1: gọi và là tập hợp những đỉnh khác rỗng khi và  
 và gọi cạnh (v,u) là cạnh có trọng số nhỏ nhất với một điểm kết thúc trong và một điểm kết thúc trong . Thì, (u,v) là một trong các cạnh trong cây bao trùm nhỏ nhất của G.

Bổ đề 1 có thể phát biểu dưới dạng khác như sau: trong một đồ thị G, với mỗi đỉnh u, trong số các cạnh liên thuộc u, nếu cạnh (u,v) có trọng số nhỏ nhất thì (u,v) phải là cạnh nằm trong cây bao trùm nhỏ nhất của G. Xem hình 4.6.1 . Với đỉnh 2, trong số tất cả cạnh liên thuộc với 2, Cạnh (2,4) có trọng số nhỏ nhất. Vì vậy, cạnh (2,4) phải nằm trong cây bao trùm nhỏ nhất của G. Tương tự, dễ dàng chứng minh cạnh (5,6) cũng phải nằm trong cây bao trùm nhỏ nhất .

0

3

5

1

2

4

6

7

8

11

**4**

**2**

**5**

**3**

**7**

**6**

**2**

**1**

**4**

**3**

**5**

**1**

**2**

**4**

**6**

**1**

**4**

**9**

**2**

10

9

12

13

**3**

Hình 4.6.1 Đồ thị

Bây giờ chúng ta hãy chọn tất cả cạnh phải nằm trong cây bao trùm nhỏ nhất, của đồ thị 4.6.1 dựa vào bổ đề 1. Kết quả những thành phần liên thông được thể hiện ở hình 4.6.2. Trong đồ thị hình 4.6.2, tất cả những đường đứt nét thì kết nối với các cạnh thành phần. bây giờ chúng ta hãy thu nhỏ tất cả các đỉnh liên thông với nhau thành một đỉnh. Bây giờ ta có 5 đỉnh, thể hiện trong hình 4.6.3. Sau khi chúng ta loại trừ những cạnh bội và khuyên được kết quả ở hình 4.6.4.

Khi đồ thị kết quả chứa nhiều hơn một đỉnh, Chúng ta áp dụng bổ đề 1 một lần nữa. Kết quả thể hiện ở hình 4.6.5 và cạnh được chọn là (0,3), (2,11) và (6,7).

Sau khi thu nhỏ các nút ở mỗi thành phần liên thông, chúng ta có 2 đỉnh. (hình 4.6.6) Sau khi chúng ta loại trừ những cạnh bội và khuyên được kết quả ở hình 4.6.7.

2

0

1

3

4

5

6

7

10

9

8

11

12

13

**4**

**2**

**6**

**5**

**3**

**1**

**7**

**2**

**3**

**5**

**4**

**1**

**2**

**4**

**9**

**6**

**1**

**2**

**4**

**3**

Hình 4.6.2 Các cạnh được chọn trong Boruka step

**4**

**5**

**6**

**7**

**3**

**5**

**4**

**3**

**4**

**6**

**9**

**0,1**

**2,3,4**

**5,6**

**7,9,10**

**8,11,12,13**

Hình 4.6.3 Đồ thị sau khi xây dựng

**7**

**4**

**3**

**3**

**5**

**2,3,4**

**0,1**

**5,6**

**7,9,10**

**8,11,12,13**

Hình 4.6.4 Kết quả sau khi áp dụng Boruvka step lần thứ nhất

**7**

**4**

**3**

**3**

**5**

**0,1**

**5,6**

**2,3,4**

**7,9,10**

**8,11,12,13**

Hình 4.6.5 Các cạnh được chọn trong Boruvka step lần 2

**5**

**7**

**0,1,2,3,4,8,11,12,13**

**5,6,7,9,10**

Hình 4.6.6Đồ thị được xây dựng lại từ Boruvka step lần 2

**0,1,2,3,4,8,11,12,13**

**5**

**5,6,7,9,10**

Hình 4.6.7 Đồ thị kết quả thu được từ Boruvka step lần 2

0

3

5

1

2

4

6

7

8

11

**4**

**2**

**3**

**2**

**1**

**3**

**5**

**1**

**2**

**4**

**1**

**2**

10

9

12

13

**3**

Hình 4.6.8 Cây bao trùm nhỏ nhất thu được

Một lần nữa, sau khi chúng ta loại bỏ cạnh bội và chọn (8,7), chúng ta có thể thu nhỏ tất cả đỉnh thành 1 đỉnh. Tiến trình hoàn thành. Những cạnh được chọn tạo thành một cây bao trùm nhỏ nhất (hình 4.6.8)

Giải thuật Boruvka’s để tìm cây bao trùm nhỏ nhất áp dụng Boruvka step một cách đệ quy cho đến khi đồ thị kết quả chỉ còn một cạnh. Gọi đầu vào là đồ thị G(V,E) và đầu ra là đồ thị G’(V’,E’). Boruvka step mô tả tiếp theo.

**Boruvka step:**

1. Với mỗi đỉnh u, Tìm cạnh (u,v) với trọng số nhỏ nhất kết nối với chúng. Tìm tất cả cách thành phần liên thông bằng cánh đánh dấu cạnh.
2. Thu nhỏ mỗi thành phần liên thông xác định bởi cạnh đánh dấu thành một đỉnh duy nhất. Gọi đồ thị kết quả là G’(V’,E’). Loại bỏ cạnh bội và khuyên.

Độ phức tạp của một Boruvka step là O(n+m) với n là số cạnh, m là số đỉnh. Để G liên thông thì m>n. Do đó, O(n+m)=O(m). Để mỗi thành phần liên thông xác định bởi một cạnh đánh dấu chứa ích nhất 2 đỉnh, sau khi thi hành mỗi Boruvka step , số cạnh của đồ thị thì nhỏ hơn một nữa so với ban đầu, do đó, tổng các lần Boruvka là O(log n). độ phức tạp của giải thuật Boruvka là O(m log n).

Để sử dụng Boruvka step hiệu quả, chúng ta phải sử dụng một khái niệm mới. Xem hình 4.6.9 Trong hình 4.6.9b, đồ thị G­s là một đồ thị con của G ở hình 4.6.9a. Trong hình 4.6.9d,rừng bao trùm nhỏ nhất F được gắn vào đồ thị G ban đầu . Tất cả những cạnh không thuộc F là những cạnh gạch đứt. chúng ta hãy xét cạnh (4,5). Trọng số của (4,5) là 7. Vâng, có một đường nối giữa đỉnh 4 và đỉnh 5 trong rừng F, đó là (4,3)-> (3,6)->(6,5). Trọng số của (4,5) lớn hơn trọng số lớn nhất của con đường này. Theo một bổ đề được phát biểu sao đây, cạnh (4,5) không thể là cạnh nằm trong cây bao trùm nhỏ nhất của G. Trước khi phát biểu bổ đề, chúng ta hãy mô tả một cụm từ gọi là F-heavy.

Gọi *w*(*x*, *y*) thể hiện trọng số của cạnh (*x*, *y*) trong *G*. Gọi *Gs* là một đồ thị con của *G*. *F* là rừng bao trùm nhỏ nhất của *Gs*. *wF*(*x*, *y*) thể hiện trọng số lớn nhất của một cạnh trong một đường liên thông *x* và *y* trong *F*. Nếu *x* và *y* là 2 đỉnh không liên thông trong *F*, đặt . Chúng ta nói rằng cạnh (*x*,*y*) là *F*-heavy(*F*-light) với *F* nếu .

6

0

3

5

1

2

4

8

**5**

**8**

7

**7**

**5**

**3**

**12**

**1**

**10**

**2**

**10**

**9**

**4**

**6**

Hình 4.6.9a

0

3

5

1

2

4

6

8

**5**

7

**5**

**3**

**1**

**2**

**10**

**4**

**6**

Hình 4.6.9b

0

3

5

1

2

4

6

8

**5**

7

**5**

**3**

**1**

**2**

**10**

**4**

Hình 4.6.9c

0

5

3

8

4

**5**

7

**5**

**7**

**12**

**10**

**2**

**10**

**6**

1

**3**

**1**

**9**

**4**

2

**8**

6

Hình 4.6.9d

7

Xem xét hình 4.6.9d. Chúng ta có thể thấy rằng cạnh (4,5), (0,3) và (2, 6) là tất cả những F-heavy trong mối quan hệ với F. Với khái niệm mới này thì chúng ta có bổ đề 2 khá quan trọng.

**Bổ đề 2:** Gọi Gs là một đồ thị con của G. F là một rừng bao trùm nhỏ nhất của Gs . cạnh F-heavy trong G với mối liên hệ với F không thể là cạnh nằm trong cây bao trùm nhỏ nhất.

Chúng tôi cũng không chứng minh bổ đề 2, với bổ đề này, chúng ta biết cạnh (4,5), (0, 3),(2, 6) không thể là cạnh cây bao trùm nhỏ nhất.

Chúng ta cần một bổ đề khác để dùng Boruvka step. Đó là bổ đề 3

**Bổ đề 3:** gọi H là đồ thị con của G bằng cánh bao gồm mỗi cạnh độc lập với xác xuất p, và gọi F là cây bao trùm nhỏ nhất của H. Con số mong đợi của cạnh F-light trong G lớn nhất là n/p, với n là số đỉnh của G.

**Giải thuật**

**Input:** Một đồ thị liên thông có trọng số G

**Output**: cây bao trùm nhỏ nhất của G

Bước 1: Thực hiện Boruvka step 3 lần. Gọi kết quả là đồ thị G1(V1, E1). Nếu G1 chứa một đỉnh, trả về bộ các cạnh đánh dấu ở bước 1 và thoát.

Bước 2: Phát sinh một đồ thị con H của G1 bằng cách chọn mỗi cạnh phụ thuộc với xác xuất ½. Sử dụng giải thuật đệ quy cho H để tạo một rừng bao trùm nhỏ nhất F của H. nhận được đồ thị G2(V2, E2) bằng cách xóa toàn bộ cạnh F-heavy trong G1 với mối quan hệ với F.

Bước 3: Sử dụng giải thuật đệ quy với G2

Độ phức tạp của giải thuật

Đặt T(|V|,|E|) là giá trị kỳ vọng của thời gian thời gian của giải thuật cho đồ thị

Mỗi lần chạy bước 1 tốn . Sau khi thực hiện bước 1, ta có

và . Với bước 2, thời gian để tính *H* là . Thời gian để tính *F* là T. Thời gian cần thiết để loại bỏ những cạnh *F*-heavy là . Sử dụng bổ đề 3, ta có giá trị kỳ vọng cho lớn nhất là . Từ đó, ta có kỳ vọng của thời gian cần thiết để thực hiện bước 3 là

T. Đặt và . Chúng ta có hệ thức truy hồi sau:

Với *c* là hằng số. Ta tìm được:

Như vậy, kỳ vọng thời gian chạy của giải thuật là

Mã giả

|  |
| --- |
| Randomized-MST (G)  G1 = BoruvkaStep(G); // Boruvka Step lần thứ I  if G1 has edges  if G1 has one edg //nếu G1 chỉ có một cạnh thì thêm vào đồ thị kết quả (solvedGraph)  Add this edg to solvedGraph  else  G2 = BoruvkaStep(G1); // Boruvka Step lần thứ II  if G2 has edges  if G2 has one edg //nếu G2 chỉ có một cạnh thì thêm vào đồ thị kết quả (solvedGraph)  Add this edg to solvedGraph  else  G3 = BoruvkaStep(G2); // Boruvka Step lần thứ III  if G3 has edges  if G3 has one edg //nếu G3 chỉ có một cạnh thì thêm vào đồ thị kết quả (solvedGraph)  Add this edg to solvedGraph // kết thúc bước 1  else  // phát sinh một đồ thị con H bằng cách chọn các cạnh từ đồ thị G3 với xác xuất 1/2  Obtain a subgraph H of G3 by selecting each edge with probability ½  F=Randomized-MST(H)  for each edg in G3 and not in F  if this edg is not a F-heavy edges  Add this edg to G4 // kết thúc bước 2  Randomized-MST(G4); // bước 3  return solvedGraph |

## Kết luận

# Chương 5

# HIỆN THỰC GIẢI THUẬT NGẪU NHIÊN CHO MỘT SỐ BÀI TOÁN



## Giới thiệu

## Bài toán sắp xếp

## Bài toán xác định số nguyên tố

## Bài toán tìm cặp điểm gần nhất

## Bài toán so trùng mẩu

## Giải thuật ngẫu nhiên tìm cây bao trùm nhỏ nhất của đồ thị

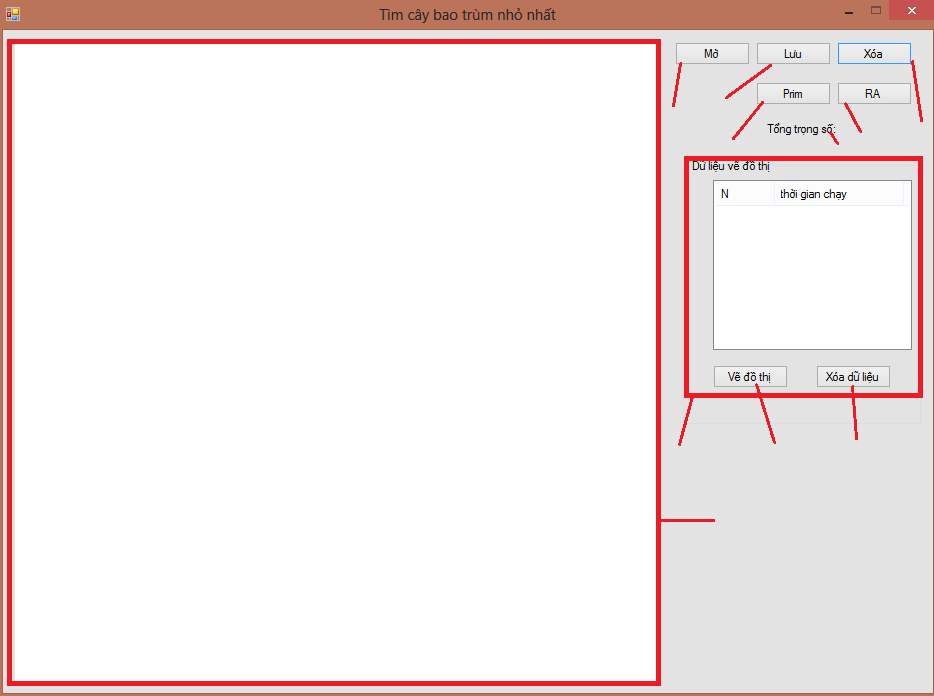
Cấu trúc dữ liệu

Chúng tôi mô tả một đồ thị là danh sách các cạnh, mỗi cạnh bao gồm 2 *đỉnh* (vertex), *trọng số của cạnh* (cost), vị trí hiển thị giá trị cost trên form (point).

Mỗi vertex bao gồm các thuộc tính *tên đỉnh* (name), *vùng* (rank), *nút gốc*( root), *vị trí hiển thị đỉnh trên form* (point).

Giao diện và sử dụng

Giao diện chính của phần hiện thực cho giải thuật tìm cây bao trùm nhỏ nhất:



**1**

**8**

**9**

**10**

**7**

**6**

**4**

**5**

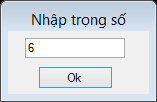
**3**

**2**

Hình 5.6.1 Giao diện chính của giải thuật tìm cây bao trùm nhỏ nhất

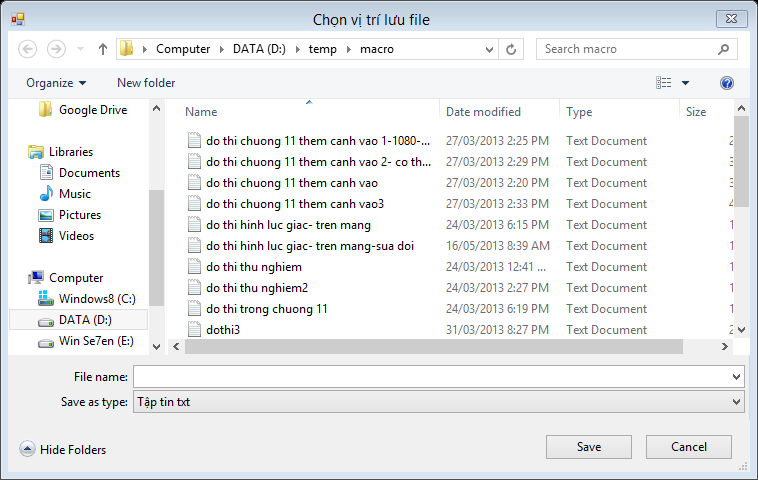
Vùng (1) đây là khu vực vẽ đồ thị mới, hiển thị đồ thị đã có lên đồng thời cũng là nơi hiển thị kết quả (cây bao trùm nhỏ nhất cần tìm)

Khi muốn vẽ một đồ thị mới, ta tiến hành click chuột trên vùng 1, mỗi lần click ta sẽ nhận được một đỉnh của đồ thị tại vị trí click. Sau đó, giữ phím Ctrl click chọn lần lượt 2 đỉnh thuộc cạnh này. Một hộp thoại (hình 5.6.2) hiện lên ta nhập trọng số của cạnh này vào.



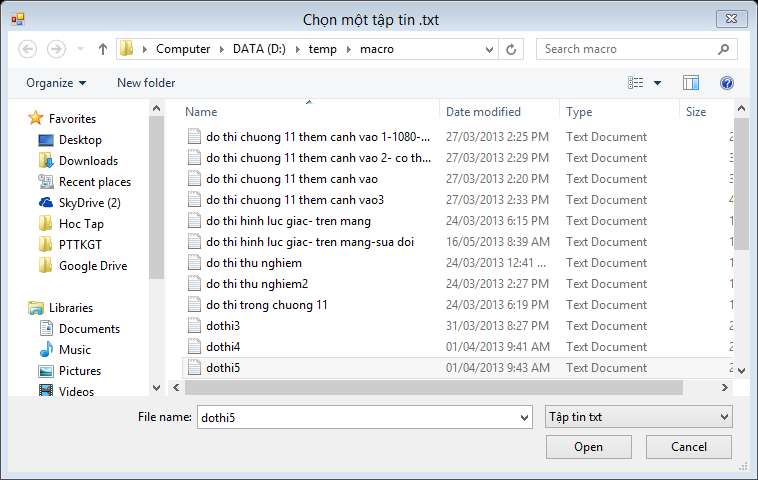
Hình 5.6.2

Sau khi vẽ xong đồ thị chúng ta có thể sử dụng nút *Lưu (3)* để lưu lại đồ thị đang có, để tiện sử dụng cho lần sau. Khi click *Lưu* thì một cửa số hiện ra (hình 5.6.3) ta chọn vị trí lưu, và đặt tên file, click *Save.*

**

Hình 5.6.3 Chọn vị trí lưu

Chúng ta có thể mở đồ thị đã vẽ sẵn bằng cách click nút *Mở* (2)*.* Một của sổ hiện ra (hình 5.6.4) , chọn file đã lưu trước đó, rồi click *Open.* Đồ thị đã lưu sẽ hiện lại lên vùng (1), chúng ta có thể sử dụng luôn hay vẽ thêm cạnh.

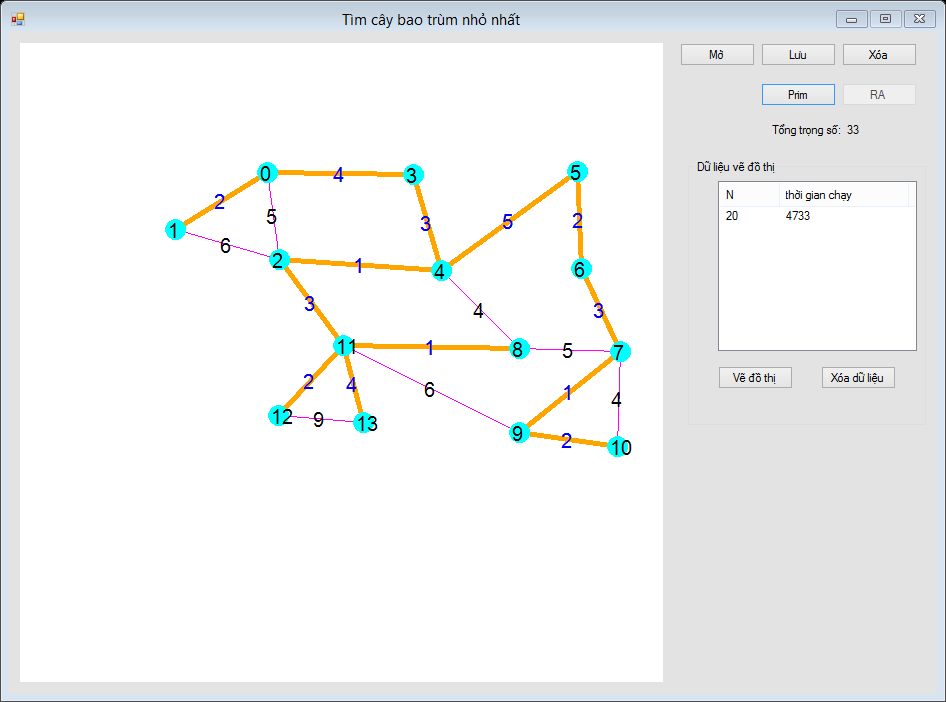


Hình 5.6.4 chọn một tập tin để mở.

Nút *Xóa* (4) cho phép ta xóa đồ thị đang có trên vùng (1).

Nút *Prim* (5) và *RA* (6), đây là 2 nút quan trọng nhất , nút (5) cho phép ta tìm cây bao trùm nhỏ nhất theo giải thuật Prim, nút (6) cho phép ta tìm cây bao trùm nhỏ nhất theo giải thuật ngẫu nhiên đã trình bày ở chương 4.

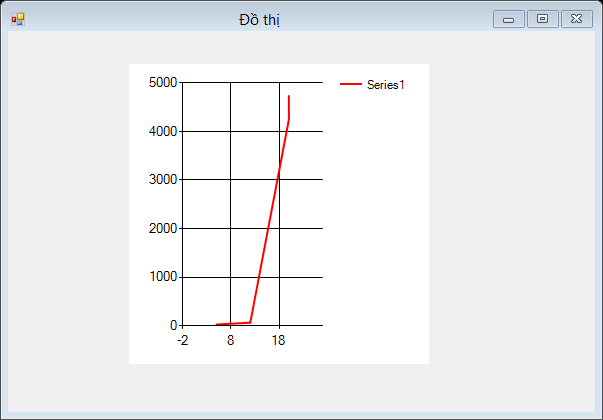
*Tổng trọng số* (7), là tổng trọng số của cây bao trùm nhỏ nhất tìm được



Hình 5.6.5 Kết quả thu được khi thực hiện giải thuật tìm cây bao trùm nhỏ nhất

Vùng (8) là khu vực dùng vẽ đồ thị thời gian chạy cho giải thuật

Mỗi lần thực hiện giải thuật, chương trình sẽ đếm số cạnh của đồ thị và tính thời gian chạy (đơn vị microsecond) đưa vào list. Từ đó ta có thể vẽ đồ thị thời gian (như hình 5.6.6) chạy bằng nút *Vẽ đồ thị* (9), ta cũng có thể xóa hết dữ liệu trong list này bằng cách click nút *Xóa dữ liệu* (10).

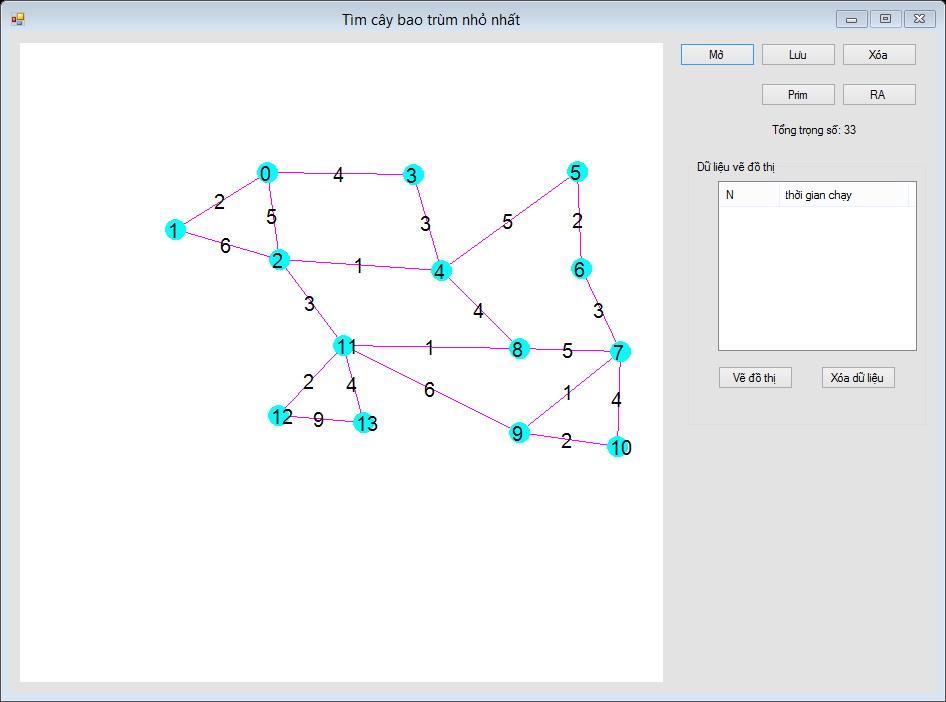


Hình 5.6.6 đồ thị thời gian chạy.

Dữ liệu thử

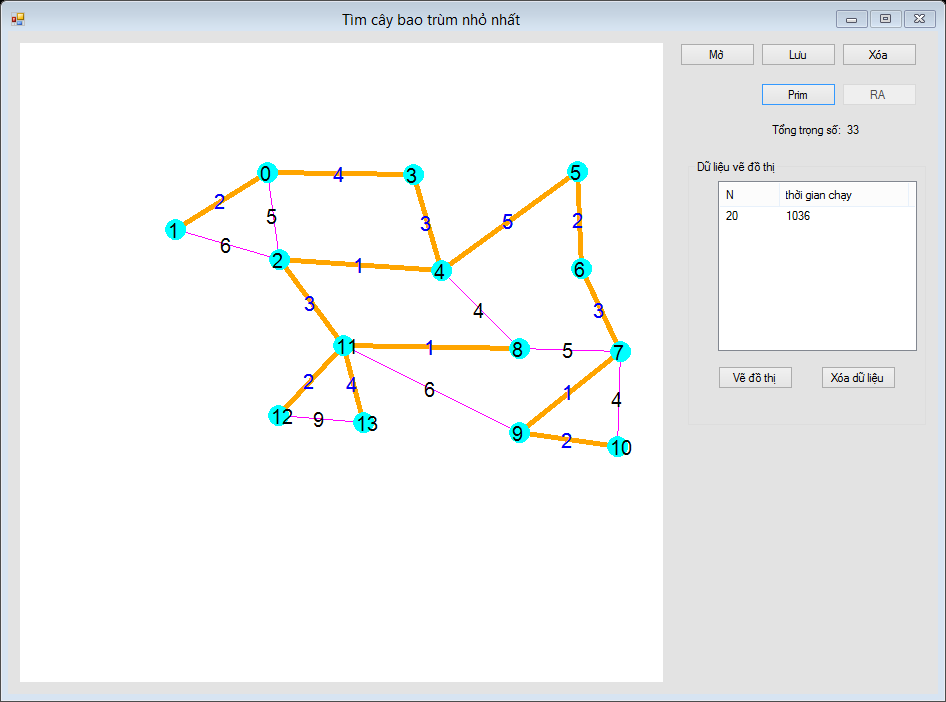
Đồ thị 1

Đồ thị đưa vào (hình 5.6.7)



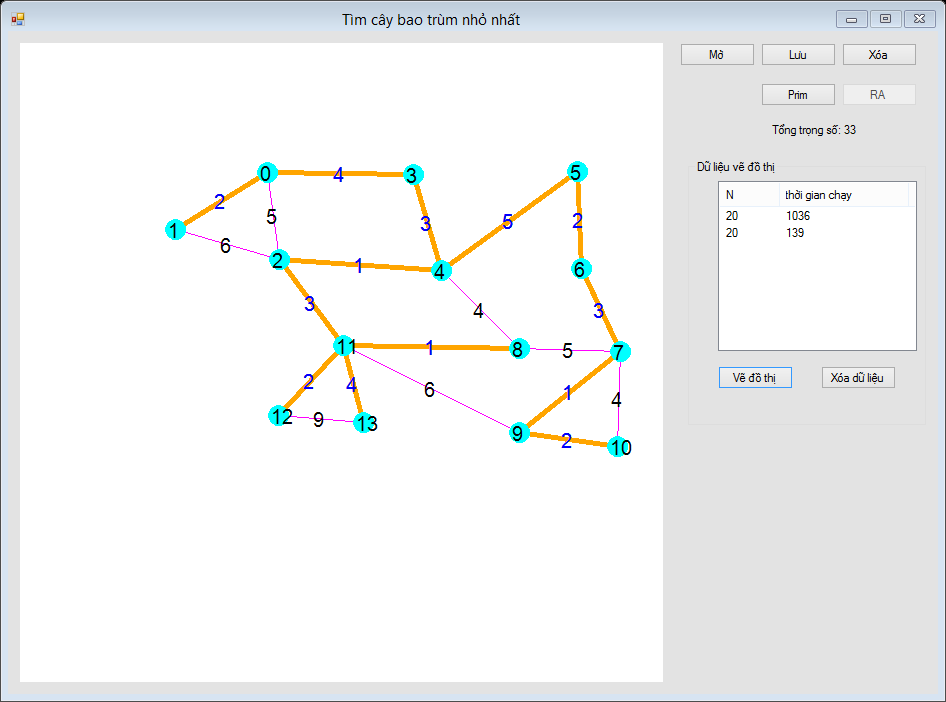
Hình 5.6.7

Kết quả khi chạy bằng giải thuật Prim (hình 5.6.8)



Hình 5.6.8

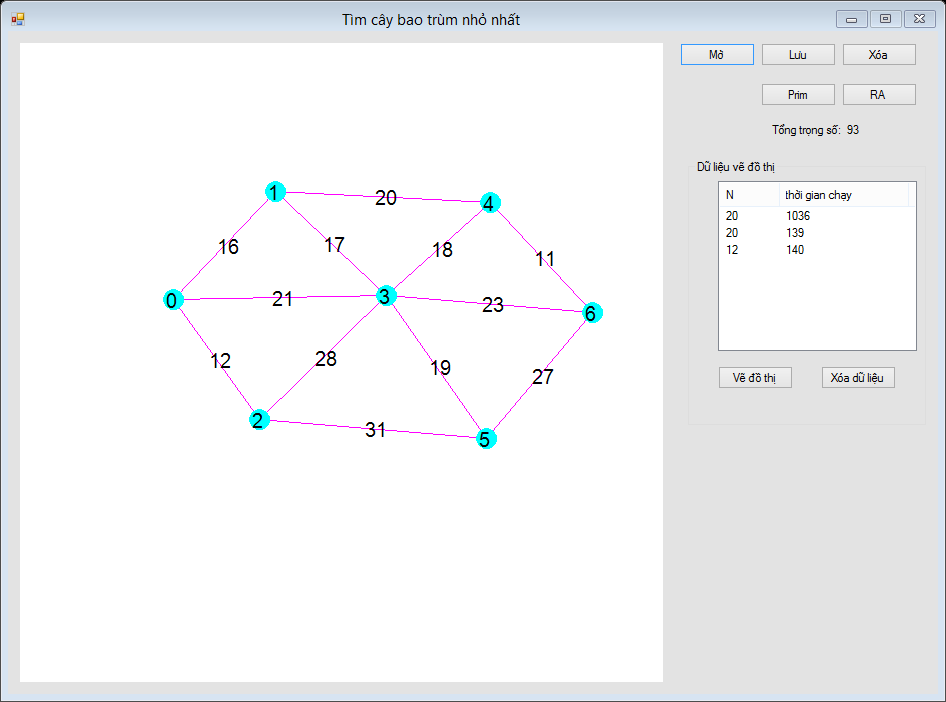
Kết quả khi chạy bằng giải thuật ngẫu nhiên (hình 5.6.9)



Hình 5.6.9

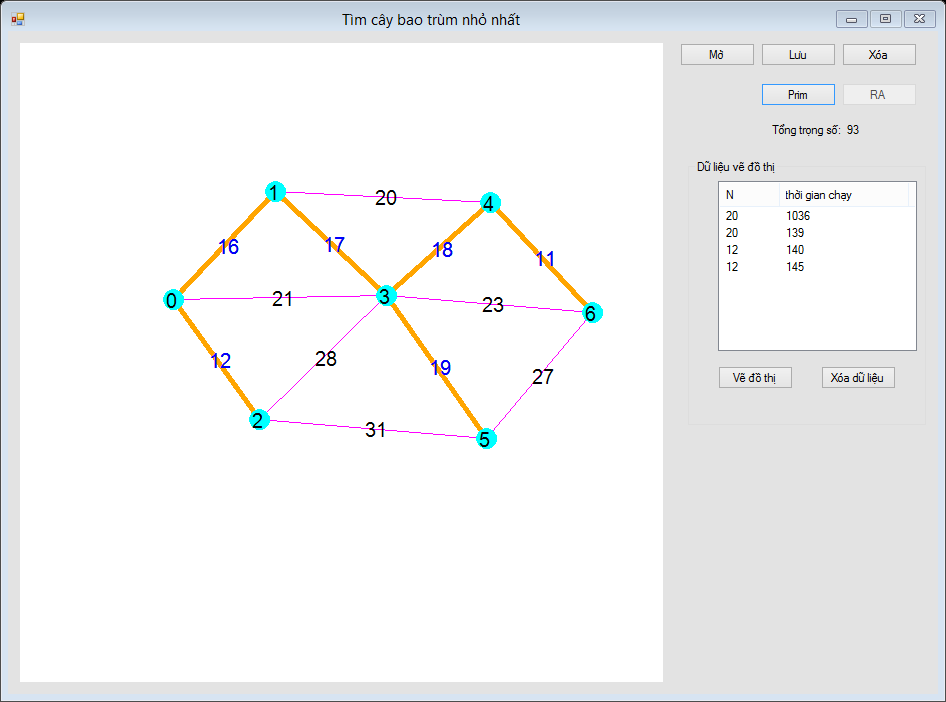
Đồ thị 2

Đồ thị đưa vào (hình 5.6.10)



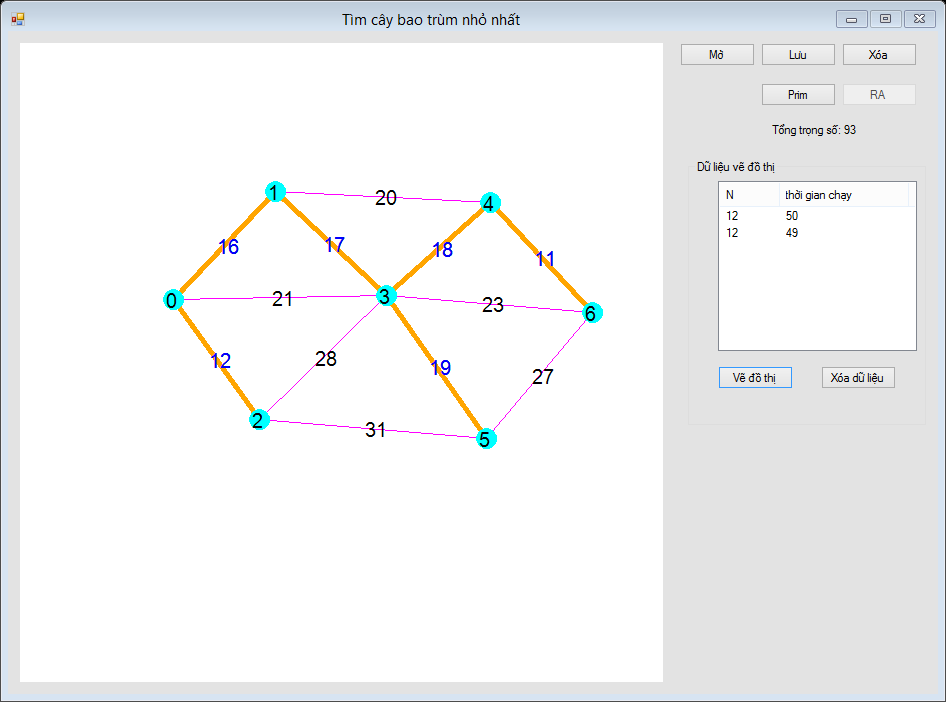
Hình 5.6.10

Kết quả khi chạy bằng giải thuật Prim (hình 5.6.11)



Hình 5.6.11

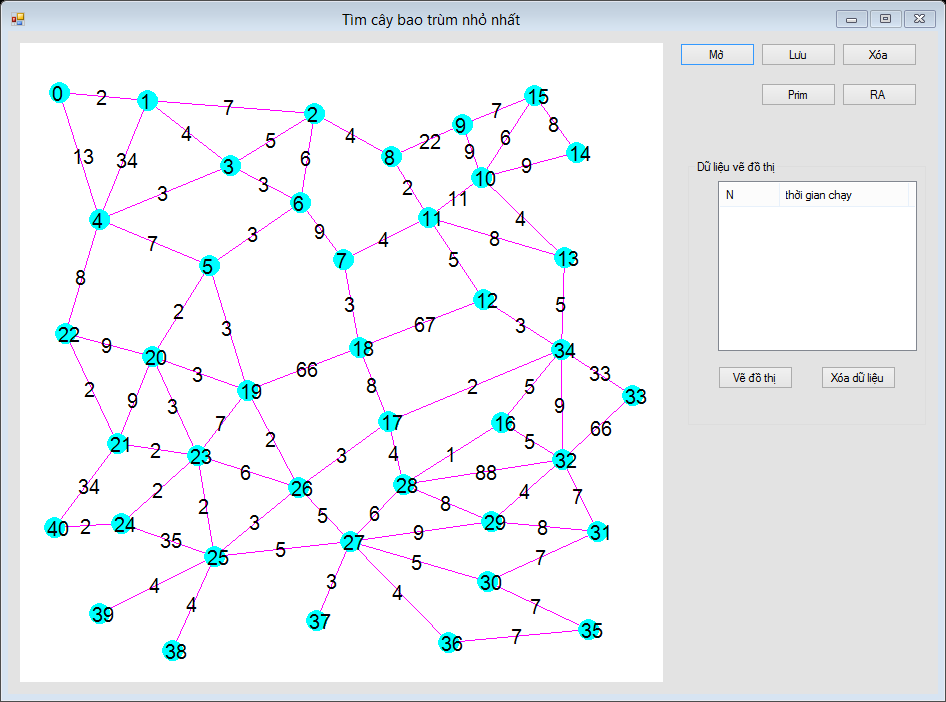
Kết quả khi chạy bằng giải thuật ngẫu nhiên (hình 5.6.12)



Hình 5.6.12

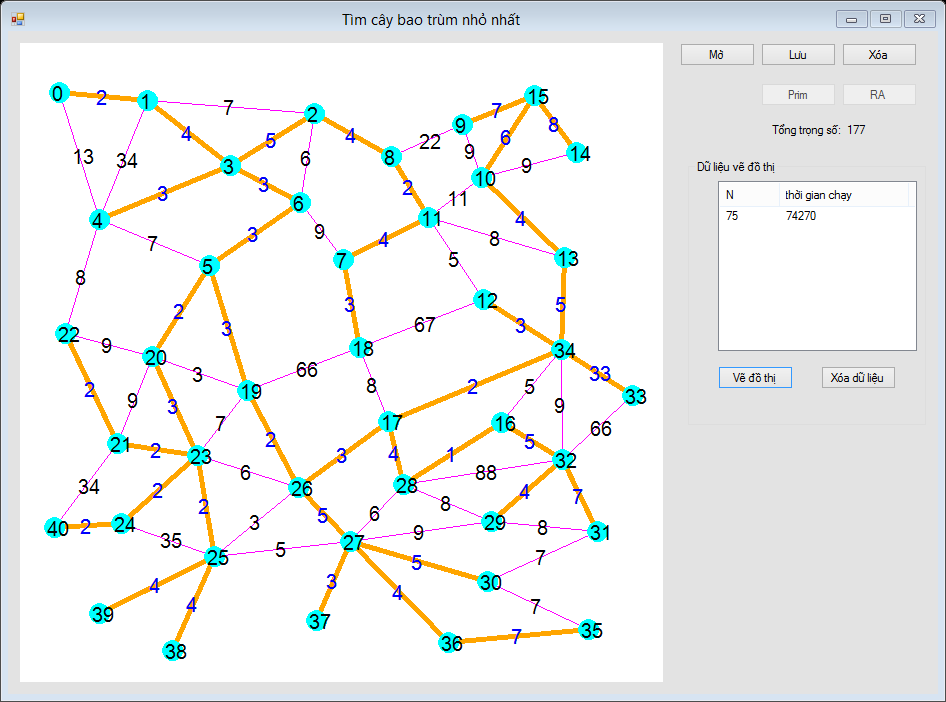
Đồ thị 3

Đồ thị đưa vào (hình 5.6.13)



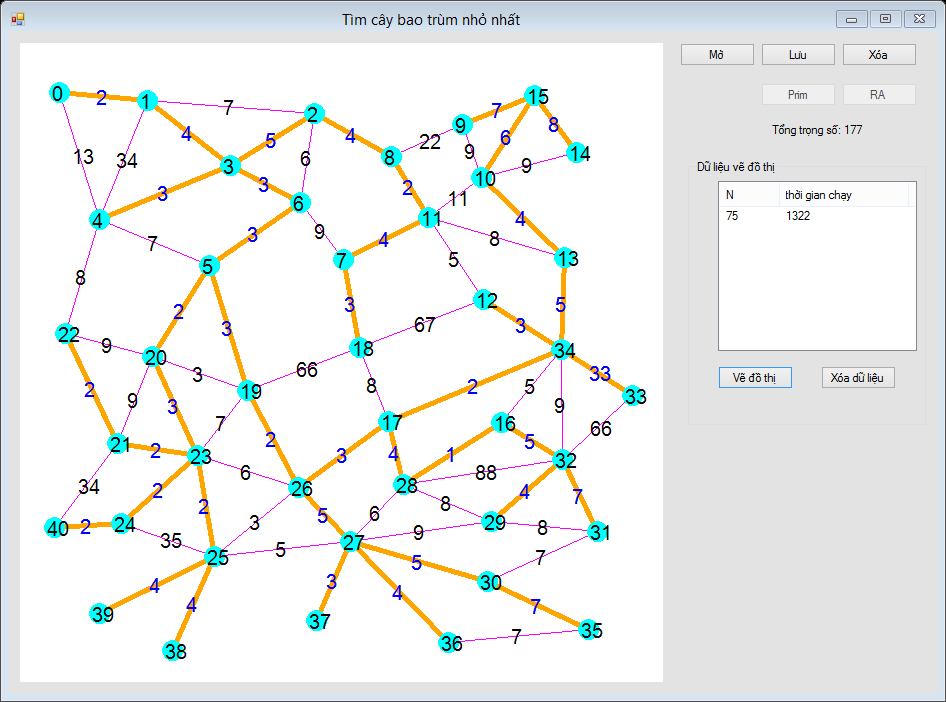
Hình 5.6.13

Kết quả khi chạy bằng giải thuật Prim (hình 5.6.14)



Hình 5.6.14

Kết quả khi chạy bằng giải thuật ngẫu nhiên (hình 5.6.15)



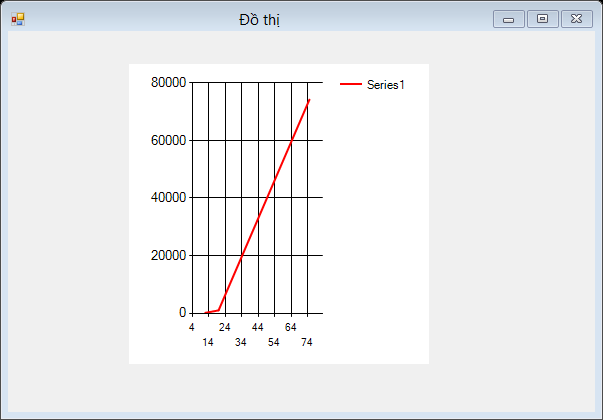
Hình 5.6.15

So sánh giữa giải thuật ngẫu nhiên và giải thuật Prim

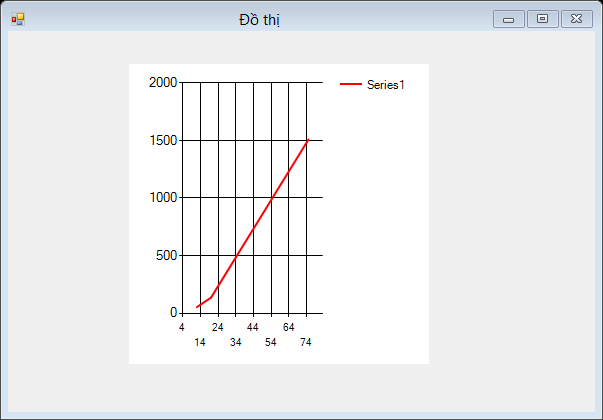
Bảng so sánh thời gian chạy (đơn vị tính: microsecond) của giải thuật ngẫu nhiên và giải thuật Prim

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Đồ thị | Thời gian chạy của giải thuật Prim | Thời gian chạy của giải thuật ngẫu nhiên |
| Đồ thị 1 | 988 | 139 |
| Đồ thị 2 | 146 | 68 |
| Đồ thị 3 | 75158 | 1323 |

Biểu đồ thời gian chạy của giải thuật Prim



Biểu đồ thời gian chạy của giải thuật ngẫu nhiên



## Kết luận

# Chương 6

# TỔNG KẾT VÀ ĐỀ NGHỊ



## Tổng kết

## Đề nghị

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Karp Richard M. *An introduction to randomized algorithms*. Discrete Applied

[2] Mathematics, 34, 1991, 165-201.

[3] Lee R.C.T, Tseng S.S, Chang R.C, Tsai Y.T. *Introduction to The design and Analysis of Algorithms-A Strategic Approach*. McGraw-Hill Education, 2005.

[4] Levitin A. *Introduction to The design and Analysis of Algorithms*. Addison-Wesley, 2012.

[5] Mitzenmacher M., Upfal E. *Probability and Computing Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge university press, 2005

[6] Motwani R., Prabhakar Raghavan P. *Randomized algorithms*. Cambridge university press, 1995.

[7] Rosen K.H. *Discrete Mathematics*, Prentice Hall Inc., 2012

[8] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald D. Rivest, clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. McGraw-Hill Book Company, 2009.

[9] en.wikipedia.org/

[10] vi.wikipedia.org/